

基于统一强度理论的冻结壁弹塑性应力分析

曹雪叶, 赵均海, 张常光

(长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061)

摘 要: 将冻结壁等效为弹性模量、黏聚力呈抛物线分布的功能梯度材料 (FGM) 厚壁圆筒, 基于统一强度理论, 考虑中间主应力的影响, 推导得到冻结壁的弹性极限荷载、弹塑性应力场及塑性极限荷载的解析解。将所得结果与均质冻结壁进行比较, 并分析强度理论参数对各个解析解的影响。研究表明: 考虑冻结壁的 FGM 特性, 应力分布较均质冻结壁有一定的变化, 环向应力由线性分布变为抛物线型分布; 环向应力的最大值不再出现在冻结壁的内壁或外壁, 而是出现在冻结壁厚度的中部; 与均质冻结壁相比, FGM 冻结壁的弹性极限荷载较大, 但塑性极限荷载却较小; FGM 冻结壁的弹性极限荷载、塑性极限荷载、径向应力及环向应力均随强度理论参数的增大而增大。所得结果可为冻结壁的设计提供一定的理论参考。

关 键 词: 冻结壁; 功能梯度材料; 抛物线分布; 统一强度理论; 弹塑性分析; 极限荷载

中图分类号: O 344.3; TD 265

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 03-0769-07

Elastoplastic stress analysis of frozen soil wall based on unified strength theory

CAO Xue-ye, ZHAO Jun-hai, ZHANG Chang-guang

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710061, China)

Abstract: The frozen soil wall can be simplified as the functionally graded material (FGM) thick cylinder with parabolic-distributed elastic modulus and cohesion. In consideration of the intermediate principal stress, the analytical solutions of the elastic ultimate load, the elastoplastic stress field and the plastic ultimate load are derived based on the unified strength theory. The results are further compared with that of a homogeneous model, the influence of the parameters of unified strength theory is investigated as well. The results show that the stress distribution of FGM frozen soil wall differs from that of homogeneous frozen soil wall, especially the circumferential stress changes from linear distribution to parabolic distribution. The maximum circumferential stress appears in the central thickness instead of the inner or outer wall. The elastic ultimate load is higher but the plastic limit load is lower than that of homogeneous frozen soil wall. The elastic ultimate load and the plastic ultimate load, the radial stress and the circumferential stress will increase with the increase of the parameters of unified strength theory. The conclusions can provide theoretical reference for the design of frozen soil wall.

Keywords: frozen soil wall; functionally graded material; parabolic distribution; unified strength theory; elastoplastic analysis; ultimate load

1 引 言

冻结法是利用人工制冷技术将不稳定含水地层冻结并形成一个封闭的圆筒即冻结壁, 以断绝地下水与井筒之间的联系, 使井筒在相对稳定、干燥的地层中施工, 这种施工方法在地铁、隧道、矿井及

基坑开挖等地下工程中得到广泛的应用^[1-2]。传统的冻结壁设计中, 一般将冻结壁视为均质厚壁圆筒进行弹性或弹塑性分析^[3-4]。实际上冻结壁材料的力学特性受控于温度场分布, 具有功能梯度材料 (FGM) 的特性。胡向东等^[5-8]基于巴霍尔夫金温度场解析解, 将冻结壁的温度场等效为梯形、三角形或抛物线型

收稿日期: 2016-02-01

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No.41202191); 陕西省社会发展科技攻关项目 (No.2015SF272); 长安大学优秀博士学位论文培育资助项目 (No.310828150018)。

This study was supported by the National Natural Science Foundation of China (41202191), the Shaanxi Province Social Development of Science and Technology Research Project (2015SF272) and the Chang'an University Cultivation Project of Excellent Doctorial Dissertations (310828150018).

第一作者简介: 曹雪叶, 女, 1989 年生, 博士研究生, 主要从事强度理论及应用等方面的研究工作。E-mail: caoxueye@126.com

分布, 并采用 Mohr-Coulomb (M-C) 强度准则对井筒横断面径向温度和材料力学参数呈梯度分布、抛物线分布的冻结壁厚圆筒进行分析, 求解得到该类冻结壁在弹塑性状态下的解析解, 但未考虑中间主应力对冻土强度的影响。统一强度理论能合理反映中间主应力效应, 可灵活应用于工程中的各种材料^[9-10]。

本文将冻结壁等效为弹性模量 E 、黏聚力 c_0 随半径呈抛物线分布的 FGM 厚壁圆筒, 基于统一强度理论考虑中间主应力的影响, 推导出冻结壁的弹性极限荷载、弹塑性应力场及塑性极限荷载, 将所得结果与均质冻结壁进行比较, 并分析了强度理论参数 b 对冻结壁弹性极限状态、塑性极限状态的影响, 所得结果可为冻结壁的设计提供一定的理论参考。

2 统一强度理论

俞茂宏^[11]以双剪单元体和双剪屈服准则为基础, 考虑作用于双剪单元体上的全部应力分量及其对材料破坏的不同影响, 建立了一种全新的考虑中间主应力影响、适用于各种不同材料的统一强度理论。统一强度理论具有不同的表达式, 岩土工程中常用材料的黏聚力 (剪切强度参数) c_0 和内摩擦角 (正应力影响系数) φ 来表示, 其数学表达式为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{1 - \sin \varphi}{(1 + b)(1 + \sin \varphi)} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2c_0 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ \sigma_2 &\leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sin \varphi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ F' &= \frac{1}{1 + b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \sigma_3 = \frac{2c_0 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ \sigma_2 &\geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sin \varphi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: F 、 F' 为强度理论函数; σ_1 、 σ_2 、 σ_3 分别为以拉为正的 1 主应力、第 2 主应力和第 3 主应力; b 为强度理论参数, 反映中间主切应力及其相应面上的正应力对材料破坏的影响程度, $0 \leq b \leq 1$; b 取不同值时, 可表示或线性逼近不同的强度准则, $b=0$ 时退化为 M-C 强度准则, $b=1$ 时退化为双剪强度准则, $0 < b < 1$ 时为一系列有序的新强度准则。

3 冻结壁弹塑性分析

设深竖井冻结壁的内半径为 R_i , 外半径为 R_e , 外表面受均匀外压力 P 作用, 其计算模型如图 1 所示。

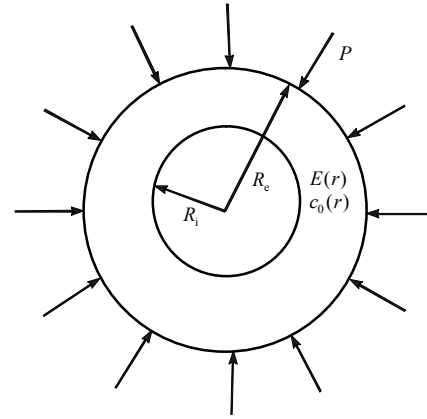


图 1 FGM 冻结壁计算模型

Fig.1 Numerical model of functionally graded material frozen soil wall

由于泊松比与内摩擦角受温度影响较小, 本文只考虑弹性模量 E 、黏聚力 c_0 随温度的变化。温度场呈抛物线变化时, E 、 c_0 也将呈抛物线变化, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} E(r) &= l_1 r^2 + m_1 r + n_1 \\ c_0(r) &= l_2 r^2 + m_2 r + n_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $r = R/R_i$ 为相对半径; l_1 、 m_1 、 n_1 、 l_2 、 m_2 、 n_2 为待定常数, 由温度场和冻土材料与温度的关系共同决定。

3.1 冻结壁弹性分析

假设冻结壁为理想弹塑性材料且不可压缩, 其弹性解为^[8]

$$\sigma_r = -P \frac{l_1 \ln r + m_1 (1 - \frac{1}{r}) + \frac{n_1}{2} (1 - \frac{1}{r^2})}{l_1 \ln r_e + m_1 (1 - \frac{1}{r_e}) + \frac{n_1}{2} (1 - \frac{1}{r_e^2})} \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = -P \frac{l_1 (\ln r + 1) + m_1 + \frac{n_1}{2} (1 + \frac{1}{r^2})}{l_1 \ln r_e + m_1 (1 - \frac{1}{r_e}) + \frac{n_1}{2} (1 - \frac{1}{r_e^2})} \quad (4)$$

式中: σ_r 为冻结壁的径向应力; σ_θ 为冻结壁的环向应力; $r_e = R_e/R_i$ 为冻结壁外半径与内半径之比。

由平面应变弹塑性问题的研究^[12]可得冻结壁的轴向应力 σ_z 为

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = -P \frac{l_1 (\ln r + \frac{1}{2}) + m_1 (1 - \frac{1}{2r}) + \frac{n_1}{2}}{l_1 \ln r_e + m_1 (1 - \frac{1}{r_e}) + \frac{n_1}{2} (1 - \frac{1}{r_e^2})} \quad (5)$$

根据 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 得

$$\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_\theta \quad (6)$$

由于 $\sigma_2 = \sigma_z \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sin \varphi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, 将

式 (3) ~ (6) 代入式 (1) 第 1 式整理得

$$P \frac{(1 + \frac{b}{2})(1 - \sin \varphi)(l_1 + \frac{m_1}{r} + \frac{n_1}{r^2}) - 2(1 + b) \left[l_1 \ln r + m_1(1 - \frac{1}{r}) + \frac{n_1}{2}(1 - \frac{1}{r^2}) \right]}{(l_2 r^2 + m_2 r + n_2) \left[l_1 \ln r_e + m_1(1 - \frac{1}{r_e}) + \frac{n_1}{2}(1 - \frac{1}{r_e^2}) \right]} = 2(1 + b) \cos \varphi \quad (7)$$

当等式左边取最大值时, 此时的半径即为塑性区初始位置。求解式 (7) 左边函数的导数, 并令其值为 0, 可得冻结壁的塑性区初始位置很靠近内壁, 即冻结壁先从内壁开始屈服。当相对半径 $r = 1.0$ 时, 由式 (7) 可得冻结壁的弹性极限荷载 P_e 为

$$P_e = \frac{l_2 + m_2 + n_2}{l_1 + m_1 + n_1} \cdot \frac{2(1 + b) \cos \varphi \left[l_1 \ln r_e + m_1(1 - \frac{1}{r_e}) + \frac{n_1}{2}(1 - \frac{1}{r_e^2}) \right]}{(1 + b/2)(1 - \sin \varphi)} \quad (8)$$

3.2 冻结壁弹塑性分析

当 $P > P_e$ 时, 冻结壁的塑性区从内壁开始向外发展。设弹塑性交界面的相对半径为 r_0 , 则 $1 \leq r \leq r_0$ 为塑性区, $r_0 \leq r \leq r_e$ 为弹性区。

在 $1 \leq r \leq r_0$ 的塑性区, 由塑性力学可知平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} + \frac{\sigma_r^p - \sigma_\theta^p}{r} = 0 \quad (9)$$

式中: σ_r^p 为冻结壁塑性区的径向应力; σ_θ^p 为冻结壁塑性区的环向应力。

将式 (5)、(6) 代入式 (1) 第 1 式整理得

$$\sigma_r^p - \sigma_\theta^p = \frac{4(1 + b)c_0 \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)} - \frac{4(1 + b) \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)} \sigma_r^p \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (9) 整理可得

$$\sigma_r^e = \frac{(P - \sigma_{r_0})(l_1 \ln r - \frac{m_1}{r} - \frac{n_1}{2r^2}) + l_1 \ln \frac{r_e^{\sigma_{r_0}}}{r_0^P} + m_1(\frac{P}{r_0} - \frac{\sigma_{r_0}}{r_e}) + \frac{n_1}{2}(\frac{P}{r_0^2} - \frac{\sigma_{r_0}}{r_e^2})}{l_1 \ln \frac{r_0}{r_e} + m_1(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_0}) + \frac{n_1}{2}(\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r_0^2})} \quad (14)$$

$$\sigma_\theta^e = \frac{(P - \sigma_{r_0})(l_1 \ln r + l_1 + \frac{n_1}{2r^2}) + l_1 \ln \frac{r_e^{\sigma_{r_0}}}{r_0^P} + m_1(\frac{P}{r_0} - \frac{\sigma_{r_0}}{r_e}) + \frac{n_1}{2}(\frac{P}{r_0^2} - \frac{\sigma_{r_0}}{r_e^2})}{l_1 \ln \frac{r_0}{r_e} + m_1(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_0}) + \frac{n_1}{2}(\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r_0^2})} \quad (15)$$

当 $r = r_0$ 时, σ_r 连续, 即塑性区和弹性区交接面上径向应力相等, 即

$$\sigma_r^p|_{r=r_0} = \sigma_r^e|_{r=r_0} = \sigma_{r_0} \quad (16)$$

且在 $r = r_0$ 处弹性区内壁恰好屈服, 则

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} - \frac{4(1 + b) \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)} \frac{\sigma_r^p}{r} = -\frac{4(1 + b) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)} (l_2 r + m_2 + \frac{n_2}{r}) \quad (11)$$

解式 (11) 非齐次线性方程, 并利用边界条件

$$r = 1, \sigma_r = 0$$

可得冻结壁塑性区的应力场为

$$\sigma_r^p = \left[\frac{2 \cos \varphi (1 + b) l_2}{(1 + b)(1 - 3 \sin \varphi) + (1 - \sin \varphi)} + \frac{4 \cos \varphi (1 + b) m_2}{(1 + b)(1 - 5 \sin \varphi) + (1 - \sin \varphi)} - \frac{\cos \varphi n_2}{\sin \varphi} \right] r^{\frac{4(1 + b) \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)}} - \frac{2 \cos \varphi (1 + b) l_2}{(1 + b)(1 - 3 \sin \varphi) + (1 - \sin \varphi)} r^2 - \frac{4 \cos \varphi (1 + b) m_2}{(1 + b)(1 - 5 \sin \varphi) + (1 - \sin \varphi)} r + \frac{\cos \varphi n_2}{\sin \varphi} \quad (12)$$

$$\sigma_\theta^p = \left[\frac{4(1 + b) \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)} + 1 \right] \sigma_r^p - \frac{4(1 + b) \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(b + 2)} c_0 \quad (13)$$

在 $r_0 \leq r \leq r_e$ 的弹性区, 其计算模型为一厚壁圆筒, 其相对内半径为 r_0 且作用荷载 σ_{r_0} , 相对外半径为 r_e 且作用荷载 P 。由文献[8]得弹性区的应力场为

$$\sigma_r^e - \sigma_\theta^e = \frac{(\sigma_{r_0} - P)(l_1 + \frac{m_1}{r_0} + \frac{n_1}{r_0^2})}{l_1 \ln \frac{r_0}{r_e} + m_1(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_0}) + \frac{n_1}{2}(\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r_0^2})} =$$

$$\frac{4(1+b)c_0 \cos \varphi}{(1-\sin \varphi)(b+2)} - \frac{4(1+b) \sin \varphi}{(1-\sin \varphi)(b+2)} \sigma_{r_0} \quad (17)$$

将式 (16)、(17) 联立即可求得相对塑性半径 r_0 。

3.3 塑性极限荷载

随着 P 的不断增大, 冻结壁的塑性区将不断扩大, 当 $r_0 = r_e$ 时, 由式 (12) 可得冻结壁的塑性极限荷载 P_p 为

$$P_p = \left[\frac{2 \cos \varphi (1+b) l_2}{(1+b)(1-3 \sin \varphi) + (1-\sin \varphi)} + \right.$$

$$\left. \frac{4 \cos \varphi (1+b) m_2}{(1+b)(1-5 \sin \varphi) + (1-\sin \varphi)} - \frac{\cos \varphi n_2}{\sin \varphi} \right] r_e^{\frac{4(1+b) \sin \varphi}{(1-\sin \varphi)(b+2)}} -$$

$$\frac{2 \cos \varphi (1+b) l_2}{(1+b)(1-3 \sin \varphi) + (1-\sin \varphi)} r_e^2 -$$

$$\frac{4 \cos \varphi (1+b) m_2}{(1+b)(1-5 \sin \varphi) + (1-\sin \varphi)} r_e + \frac{\cos \varphi n_2}{\sin \varphi} \quad (18)$$

由式 (8)、(18) 可知, 当冻结壁及其温度场确定时, 冻结壁的弹性极限荷载、塑性极限荷载仅与强度理论参数 b 有关。

当 $b=0$ 时, 式 (8)、(12)、(13) 可退化为 M-C 强度准则下的结果, 与文献[8]结果相同; 当 $0 < b \leq 1$ 时, 本文结果退化为一系新强度准则下的结果。故本文所得结果可作为 FGM 冻结壁弹塑性应力分析的统一解。

4 FGM 冻结壁与均质冻结壁的比较及参数分析

取文献[8]中的算例: 冻土为某冻结砂性粉质黏土, 内摩擦角为 10.3° , 冻结壁内半径 $R_i = 5$ m, 外半径 $R_e = 7.5$ m, 则外半径与内半径之比 $r_e = 1.5$ 。弹性模量 E 及黏聚力 c_0 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} E(r) &= -4\,095r^2 + 10\,237.5r - 6\,129.3 \\ c_0(r) &= -33.6r^2 + 84r - 50.26 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对于同等条件下的均质冻结壁, 弹性模量 $E = 184$ MPa, 黏聚力 $c_0 = 1.59$ MPa。

4.1 FGM 冻结壁与均质冻结壁的应力分布比较

采用本文与统一强度理论所得均质冻结壁的结果

果^[4], 分析弹性和塑性极限状态下 FGM 冻结壁与均质冻结壁的应力分布, 径向应力 σ_r 及环向应力 σ_θ 随相对半径 r 的变化如图 2、3 所示。

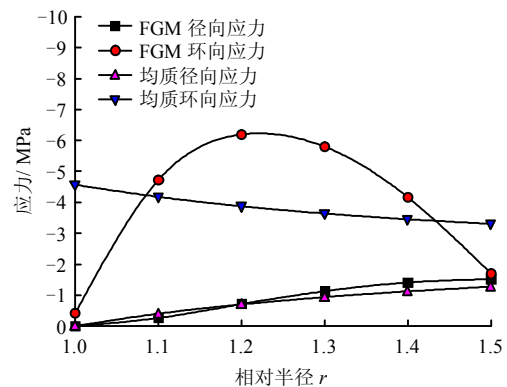


图 2 弹性极限状态时冻结壁的应力分布 ($b = 0.5$)
Fig.2 Stress distributions of frozen wall in the elastic ultimate state ($b = 0.5$)

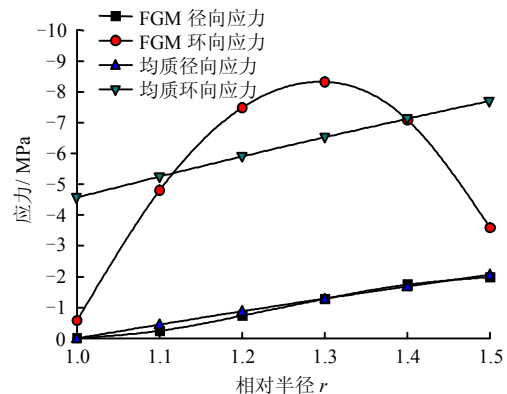
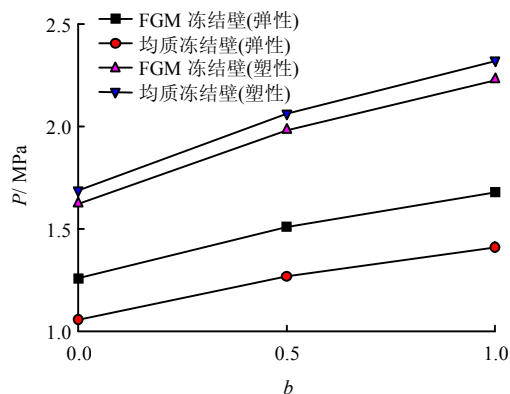
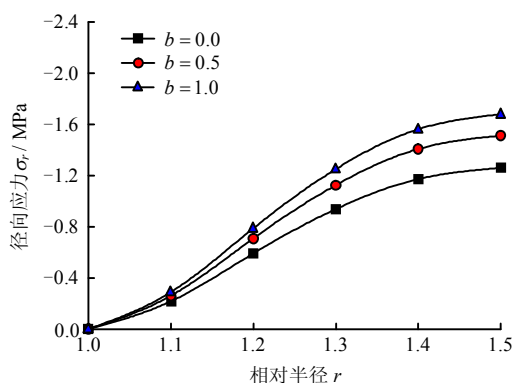
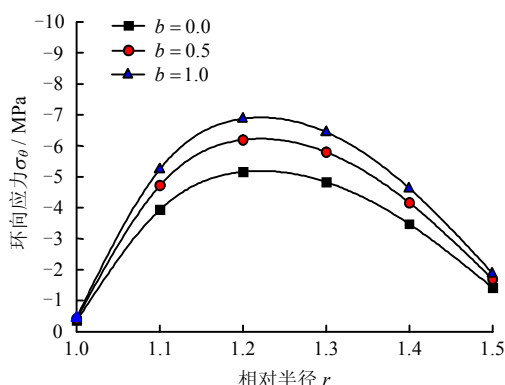
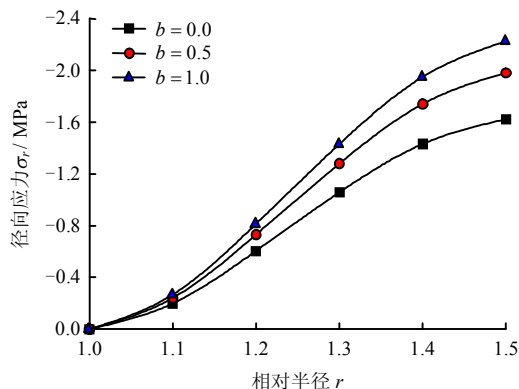
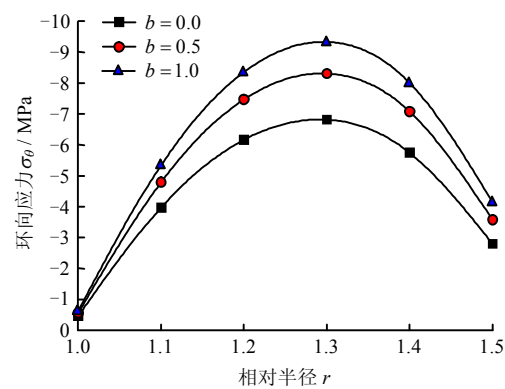


图 3 塑性极限状态时冻结壁的应力分布 ($b = 0.5$)
Fig.3 Stress distributions of frozen wall in the plastic ultimate state ($b = 0.5$)

由图 2、3 可得, 均质冻结壁的 σ_r 随 r 的增大线性增大, FGM 冻结壁的 σ_r 随 r 的增大非线性增大; 弹性极限状态时, 均质冻结壁的 σ_θ 随 r 的增大而减小, 最大值出现在冻结壁内壁处, 塑性极限状态时, σ_θ 随 r 的增大而增大, 最大值出现在冻结壁的外壁处; FGM 冻结壁的 σ_θ 随 r 的增大先增大后减小, 呈抛物线型分布, 最大值出现在冻结壁厚度的中部; 与均质冻结壁相比, FGM 冻结壁受功能梯度材料特性的影响使其边界处的 σ_θ 变化较大; 因此, 考虑冻结壁的 FGM 特性, 使冻结壁的应力分布较均质冻结壁有一定的变化, 环向应力的变化尤为显著。

4.2 极限承载力的比较及参数分析

由式 (8)、(18) 及文献[4]结果分析冻结壁弹性极限荷载 P_e 、塑性极限荷载 P_p 的变化规律, 结果如图 4 所示。

图4 极限荷载的比较及随 b 的变化规律Fig.4 Comparison of ultimate loads and their variation with b (a) $\sigma_r - r$ (b) $\sigma_\theta - r$ 图5 弹性极限状态下应力与 b 的关系Fig.5 Relationships between stress and b in elastic limit state(a) $\sigma_r - r$ (b) $\sigma_\theta - r$ 图6 塑性极限状态下应力与 b 的关系Fig.6 Relationships between stress and b in plastic limit state

由图 5、6 可以知道, FGM 冻结壁的 σ_r 随 r 的增大而增大, 在冻结壁外壁处达到最大值; 当 b 从 0 增加到 1 时, 该处的 σ_r 在弹性极限状态下由 -1.259 MPa 增加到 -1.629 MPa, 增加了 33.3%, 在塑性极限状态下由 -1.622 MPa 增加到 -2.227 MPa, 增加了 37.3%; FGM 冻结壁的 σ_θ 随 r 呈抛物线分布, 与冻结壁的温度场分布相同; 弹性极限状态下,

由图 4 看出, 当 b 从 0 增加到 1 时, FGM 冻结壁的弹性极限荷载 P_e 从 1.259 MPa 增加到 1.679 MPa, 增加了 33.4%, 塑性极限荷载 P_p 从 1.622 MPa 增加到 2.227 MPa, 增加了 37.3%, 这是由于随着 b 的增加中间主应力效应更加显著, 材料的潜能得到更充分的发挥; 相同条件下 FGM 冻结壁的 P_e 较均质冻结壁提高了 19%, P_p 较均质冻结壁减小了 4%。因此, 冻结壁在弹性范围内设计时可充分利用其弹性承载力, 塑性设计时应考虑其在相对较小的荷载下进入塑性极限状态, 保证冻结壁有较好的安全性。

弹性极限状态、塑性极限状态下冻结壁的 σ_r 、 σ_θ 与 b 的关系分别如图 5、6 所示。

σ_θ 的最大值在相对半径 $r = 1.22$ 处, 当 b 从 0 增加到 1 时, 该处的 σ_θ 由 -5.195 MPa 增加到 -6.928 MPa, 增加了 33.4%; 塑性极限状态下, σ_θ 的最大值在相对半径 $r = 1.29$ 处, 当 b 从 0 增加到 1 时, 该处的 σ_θ 由 -6.837 MPa 增加到 -9.344 MPa, 增加了 36.7%。因此, 考虑中间主应力影响, 使材料的潜能得到充分发挥。

5 结 论

(1) 基于统一强度理论, 考虑弹性模量 E 、黏聚力 c_0 随半径呈抛物线分布, 推导得到冻结壁的弹性极限荷载、弹塑性应力场及塑性极限荷载。与传统方法相比, 本文方法考虑了中间主应力影响及冻结壁的 FGM 特性, 所得结果可为冻结壁的设计提供一定的理论参考。

(2) 考虑冻结壁的 FGM 特性后, 其应力分布较均质冻结壁有一定的变化, 环向应力的变化尤为显著, 由线性分布变为抛物线型分布。环向应力的最大值不再出现在冻结壁的内壁或外壁, 而是出现在冻结壁厚度的中部。

(3) 与均质冻结壁相比, FGM 冻结壁的弹性极限荷载较大, 冻结壁在弹性范围内设计时可充分利用其弹性承载力; 但塑性极限荷载却较小, 即 FGM 冻结壁在相对较小的荷载下即进入塑性极限状态, 在冻结壁设计时应予以考虑, 使冻结壁有较好的安全性。

(4) FGM 冻结壁的弹性极限荷载 P_e 、塑性极限荷载 P_p 均随 b 的增大而增大; 径向应力 σ_r 随 b 和 r 的增大而增大; σ_θ 随 b 的增大而增大; σ_θ 随 r 为先增大后减小的抛物线分布, 与冻结壁的温度场分布相同。

参 考 文 献

- [1] 李阳, 李栋伟, 陈军浩. 人工冻结黏土冻胀特性试验研究[J]. 煤炭工程, 2015, 47(2): 126—129.
LI Yang, LI Dong-wei, CHEN Jun-hao. Experimental research on frost heave of artificial frozen clay[J]. **Coal Engineering**, 2015, 47(2): 126—129.
- [2] 蔡海兵, 彭立敏, 郑腾龙, 等. 隧道水平冻结壁强制解冻期地表沉降的预测方法[J]. 岩土力学, 2015, 36(12): 3516—3521, 3530.
CAI Hai-bing, PENG Li-min, ZHENG Teng-long, et al. A method for predicting ground surface settlement in the artificial thawing period of tunnel horizontally frozen wall[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(12): 3516—3521, 3530.
- [3] 杨维好, 杨志江, 韩涛, 等. 基于与围岩相互作用的冻结壁弹性设计理论[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(3): 516—519.
YANG Wei-hao, YANG Zhi-jiang, HAN Tao, et al. Elastic design theory of frozen soil wall based on interaction between frozen soil wall and surrounding rock[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2012, 34(3): 516—519.
- [4] 张常光, 赵均海, 魏雪英. 基于统一强度理论冻结壁应力场和位移场研究[J]. 地下空间与工程学报, 2008, 4(3): 465—469.
ZHANG Chang-guang, ZHAO Jun-hai, WEI Xue-ying. Investigation the stress field and displacement field on the frozen wall based on the unified strength theory[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2008, 4(3): 465—469.
- [5] 胡向东. 直线形单排管冻土帷幕平均温度计算方法[J]. 冰川冻土, 2010, 32(4): 778—785.
HU Xiang-dong. Average temperature calculation for the straight single-row-pipe frozen soil wall[J]. **Journal of Glaciology and Geocryology**, 2010, 32(4): 778—785.
- [6] 胡向东, 赵飞, 余思源, 等. 直线双排管冻结壁平均温度的等效抛物弓形模型[J]. 煤炭学报, 2012, 37(1): 28—32.
HU Xiang-dong, ZHAO Fei, SHE Si-yuan, et al. Equivalent parabolic arch method of average temperature calculation for straight double-row-pipe frozen soil wall[J]. **Journal of China Coal Society**, 2012, 37(1): 28—32.
- [7] 胡向东, 舒畅. 考虑 FGM 特性的双排管竖井冻结壁应力场分析[J]. 工程力学, 2014, 31(1): 145—153.
HU Xiang-dong, SHU Chang. Stress field analysis of functionally graded material frozen soil wall in double-row-pipe shaft freezing[J]. **Engineering Mechanics**, 2014, 31(1): 145—153.
- [8] 胡向东, 舒畅, 余思源. 均布荷载下抛物线形 FGM 冻结壁弹塑性解[J]. 煤炭学报, 2012, 37(3): 379—384.
HU Xiang-dong, SHU Chang, SHE Si-yuan. Elastic-plastic analytical solution for functionally graded material frozen soil wall with parabolic property under uniform load[J]. **Journal of China Coal Society**, 2012, 37(3): 379—384.
- [9] 赵阳, 陈昌富, 王纯子. 基于统一强度理论带帽刚性桩承载力上限分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(6): 1649—1656.
ZHAO Yang, CHEN Chang-fu, WANG Chun-zi. An upper-bound limit analysis of the bearing capacity of a capped rigid pile based on unified strength theory[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(6): 1649—1656.